

42-AMALIY MASHG'ULOT

Ish vaqti va bosqichlari	O'qituvchi faoliyatining mazmuni	Talabalar faoliyatining mazmuni
I-Bosqich O'quv mashg'ulotiga kirish (10 daqiqa)	1.1. Mashg'ulot mavzusi bo'yicha tushuncha berish. 1.2. Mavzuning avvalgi o'tilgan mavzu bilan aloqadorligi bo'yicha tushuncha berish	Tinglaydilar, yozadilar
II-Bosqich Asosiy (65 daqiqa)	2.1. Amaliy mashg'ulot mavzusiga oid nazariy ma'lumot berish. 2.2. Mavzuga oid amaliy topshiriqlar bajarish.	Tinglaydilar, yozadilar, savollar beradi, bajaradilar.
III-Bosqich Yakunlovchi (5 daqiqa)	3.1. Amaliy mashg'ulotni yakunlash 3.2. Talabalarga mustaqil bajarish uchun topshiriqlar berish.	Tinglaydilar, yozadilar, savollar beradi, bajaradilar.

42-MAVZU: DISKRET TASODIFIY MIQDORLARNING MATEMATIK KUTULMASI VA DISPERSIYASI

1. Tasodifiy miqdorlar. Indekatorlar

Ta'rif: chekli ehtimollar fazosi (Ω, A, P) berilgan bo'lib, w elementar hodisa uchun aniklangan $\zeta(w)$, $w \in \Omega$ sonli funksiyaga tasodifiy miqdor deyiladi.

Ko'pincha tasodifiy miqdorlarni grek harflari $\xi, r, \zeta, \nu, \dots$ kabilar bilan belgilaymiz.

1-misol. Bernulli sxemasida $\Omega \ni w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, bo'lib, $w_i = 1$ agar i -nchi tajribada biz kutgan hodisa ro'y bersa, $w_i = 0$, agar i -nchi tajribada biz kutgan hodisa ro'y bermasa. U holda n ta tajribada biz kutgan hodisalarni ro'y berishlar soni $\mu = \mu(w) = w_1 + w_2 + \dots + w_n$ bo'ladi.

2-misol. Yashikda M ta ok $N - M$ ta kora shar bor. Qayta ko'ymaslik sharti bilan $n (n \leq N)$ ta shar olingan bo'lsin. Agar ok sharlar 1 dan M gacha nomerlangan bo'lsa, Ω elementar hodisalar fazosi Ω $w = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$, ko'rinishdagi elementlardan tuzilgan bo'ladi.

Bu holda chikkan ok sharlar soni ξ tasodifiy miqdor bo'lib, $\xi = \zeta(w) = m, i_m \leq M < i_{m+1}, 1 \leq m \leq M$, bo'ladi.

Agar $q(x_1, x_2, \dots, x_r)$ -sonli funksiya bo'lib, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ lar tasodifiy miqdorlar bo'lsa, u holda $\eta = \eta(w) = q(\xi_1(w), \xi_2(w), \dots, \xi_r(w))$ murakkab funksiya ham tasodifiy miqdor bo'ladi.

Ta'rif: $A, A \in A$ hodisaning indekatori deb, $J_A = J_A(w) = \begin{cases} 1, & w \in A \\ 0, & w \in A^c \end{cases}$ tasodifiy miqdorga aytiladi.

3-misol. Bernulli sxemasida n ta bog'liqsiz tajribada A hodisani μ marta ro'y berish taqsimot qonuni $P(\mu = m) = C_n^m P^m (1 - P)^{n-m}$, $m = 0, 1, \dots, n$ bo'ladi. Bunday taqsimotga binomial taqsimot qonun deyiladi.

2. Matematik kutilma

Agar $P(\omega)$ chekli (Ω, A, P) ehtimollar fazosidan olingan bo'lib, $\sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega) P(\omega) = M\xi$ yaqinlashuvchi bo'lsa, $M\xi$ ga ξ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi deyiladi. Matematik kutilma quyidagi xossalarga ega.

$$1) MJ_A = P(A)$$

$$\text{Hakikatan ham, } MJ_A = \sum_{\omega \in \Omega} J_A(\omega) P(\omega) = \sum_{\omega \in A} P(\omega) = P(A)$$

$$2) \text{ Additivlik } M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta, \text{ chunki}$$

$$M(\xi + \eta) = \sum_{\omega \in \Omega} (\xi(\omega) + \eta(\omega)) P(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega) P(\omega) + \sum_{\omega \in \Omega} \eta(\omega) P(\omega) = M\xi + M\eta$$

Matematik induksiya usulini ko'llab, $M(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) = M\xi + \dots + M\xi_n$ ligini ko'rsatish mumkin.

$$3) \text{ Ixtiyoriy } S \text{ o'zgarmas son uchun } MC\xi = CM\xi, \quad MC = C$$

$$4) \text{ Agar } \xi \geq \eta \text{ bo'lsa, } M\xi \geq M\eta \text{ va } \xi \geq 0 \text{ va } M\xi = 0 \text{ bo'lsa, } P(\xi = 0) = 1 \text{ bo'ladi.}$$

3. Dispersiya

Agar $q(x)$ sonli funksiya bo'lsa, u xolda, x o'rinli ξ ni qo'ysak $\eta = q(\xi)$ tasodifiy miqdor (tasodifiy funksiya) xosil bo'ladi, u holda matematik kutilma ta'rifiga ko'ra $M\eta = Mq(\xi) = \sum_{i=1}^k q(x_i) P(\xi = x_i)$ bo'ladi. Xususan $q(\xi) = \xi^n$ bo'lsa

$$M\xi^n = \sum_{i=1}^k x_i^n P(\xi = x_i)$$

Bu miqdorga ξ tasodifiy miqdorning n -nchi momenti, $M|\xi|^n$ ga esa n -nchi absolyut moment, $M(\xi - M\xi)^n$ ga n -nchi markaiziy moment, $M|\xi - M\xi|^n$ ga n -nchi absolyut markaziy moment deyiladi.

Ikkinchi tartibli markaziy momentga ξ tasodifiy miqdorning dissersiyasi deyiladi va $D\xi = M(\xi - M\xi)^2$ kabi belgilanadi, $\sqrt{D\xi}$ ga esa o'rta kvadratik og'ish deyiladi.

Dissepriya quyidagi xossalarga ega bo'ladi:

$$1) D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$$

Xaqiqatdan ham

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M(\xi^2 - 2M\xi \cdot \xi + (M\xi)^2) = M\xi^2 - 2M\xi M\xi + (M\xi)^2 = M\xi^2 - (M\xi)^2$$

2) $D\xi \geq 0$ va $D\xi = 0$ bo'lishi uchun shunday $C \ni$ bo'ladiki $P(\xi = C) = 1$ bo'lishi zarur va etarlidir.

Bu tasdiqni isboti matematik kutilma xossasidan kelib chiqadi:

3) Ixtiyoriy C uchun $D(c\xi) = C^2 D\xi$, $D(\xi + C) = D\xi$ o'rinlidir.

4-misol. Binomial qonun bilan taqsimlangan tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

Yechish. Ma'lumki $M\xi = np$, demak

$$D\xi = \sum_k k^2 C_n^k P^k q^{n-k} - (np)^2 = np \left[(n-1)P \sum_k C_{n-2}^{k-2} P^{k-2} q^{n-k} + \sum_k C_{n-1}^{k-1} P^{k-1} q^{n-k} \right] - (np)^2 = np((n-1)p + 1) - (np)^2 = npq$$

3. Dispersiya quyidagi xossalarga ega:

1-xossa. O'zgaras sonning dispersiyasi nolga teng:

$$D(C) = 0$$

2-xossa. O'zgaras ko'paytuvchini avval kvadratga oshirib, dispersiya belgisidan tashqariga chiqarish mumkin:

$$D(CX) = C^2 D(X)$$

3-xossa. Bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar yig'indisi (ayir-masi) ning dispersiyasi qo'shiluvchilar dispersiyalarining yig'indisiga teng:

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$$

3-ta'rif. Tasodifiy miqdorning o'rtacha kvadratik chetlanishi deb dispersiyadan olingan kvadrat ildizga aytiladi:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

5-misol. Quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan X diskret taso-difiy miqdorning matematik kutilishini toping:

X:	-0,4	6	10
P:	0,2	0,3	0,5

Yechish:

$$M(X) = -0,4 \cdot 0,2 + 6 \cdot 0,3 + 10 \cdot 0,5 = 6$$

Bu tasdiqni isboti matematik kutilma xossasidan kelib chiqadi:

1) Ixtiyoriy C uchun $D(c\xi) = C^2 D\xi$, $D(\xi + C) = D\xi$ o'rinlidir.

Iensen tengsizligi $Mq(\xi) \geq q(M\xi)$

Lyapunov tengsizligi. $(M|\xi|^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \leq (M|\xi|^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$, $\alpha < \beta$

Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi. $|M(\xi\eta)| \leq \sqrt{M\xi^2 M\eta^2}$

Misollar va masalalar

1. Binomial qonun bilan taqsimlangan tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

2. Quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan X diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilishini toping:

X:	-0,4	6	10
P:	0,2	0,3	0,5